

文章编号: 1007-4619 (2002) 02-0081-07

遥感反演中约束最优化方法的拓展

阎广建¹, 朱重光², 王锦地¹, 李小文^{1,3}

(1. 北京师范大学 遥感中心, 北京 100875; 2. 中国科学院 遥感应用研究所, 北京 100101; 3. 波士顿大学 遥感中心, 美国波士顿)

摘 要: 遥感反演大多是典型的约束最优化问题。本文对现有的约束最优化方法在遥感反演中的适用性进行了分析, 从提高反演速度及降低优化方法病态特性两个方面考虑, 提出了罚矩阵的概念, 对约束最优化方法中的乘子法进行了拓展, 并进行了理论证明。经对大量的模拟反演实验表明, 拓展后的乘子法的反演速度提高了大约 30%, 病态程度也得到了进一步的改善。

关键词: 乘子法; 反演; 约束最优化; 病态问题; 罚矩阵

中图分类号: TP701 **文献标识码:** A

1 引 言

遥感的本质是反演, 在用遥感模型反演地表参数的研究中, 对反演算法的研究是其中的重点和难点之一。Goel 指出, 目前所采用的方法大部分依然是著名数学家高斯(Karl Friedrich Gauss)1795年提出来的最小二乘法^[1], 其代价函数的形式为:

$$f = \sum_i w_i [y_i - y_i'(x_j)]^2 \quad (1)$$

其中 y_i 为观测数据, x_j 为模型参数, $y_i'(x_j)$ 则由 x_j 得到的模型结果, w_i 为相应于第 i 个观测的权重。

通过最小化 f 可得到参数 x_j 的值, 这在计算数学/应用数学领域又属于无约束最优化的范畴。但是从本质上讲, 最小二乘法更适合求解观测数据远远多于模型参数的无解析解问题(也称为超定问题), 没有考虑参数的物理边界的限制, 在样本数目较少时, 对观测噪声极为敏感, 容易产生不在参数定义域之内的结果。为了解决此问题。Goel 等提出了当待反演参数 x_i 超出区域边界时, 利用 $x_i' = \alpha x_i + (1 - \alpha)x_{i-1}$ ($0 < \alpha < 1$) 来使得新的参数值 x_i' 位于 x_{i-1} 和边界之间^[2]。但是这种方法常容易造成在可行域区域内的振荡, 而且有时会陷到边界上的一个极小点。随后 Goel 和 Thompson 在此方法的基础上

作了一点改进, 引入了“牵拉”因子来作为对要越界的参数的惩罚^[3]。但是“牵拉”因子的选择完全根据经验, 而且不必要的“牵拉”会增加迭代次数。

为了找到有物理意义的解, 另外一些科学家引入了越界罚点的概念^[4]。假设要最小化的代价函数为 $f(X)$, 引入一个惩罚项后变为:

$$P(X) = f(X) + Penalty \quad (2)$$

当参数超过其实际取值范围时, 即赋予一个较大的值。但是这个惩罚项应该有多大, 没有从理论上加以说明。

本文从优化理论出发, 指出遥感物理模型的反演大多是约束最优化问题, 探讨了现有的约束最优化方法在遥感反演中的适用性, 提出了罚矩阵的概念, 对约束最优化理论中被广泛应用的乘子法进行了推广和证明, 并利用模拟反演实验进行了验证。

2 现有的约束最优化方法在遥感反演中的适用性

一般的约束最优化问题可以表示为:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(X), \quad X \in R^n \quad (3) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(X) \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, m \\ & h_i(X) = 0 \quad i=1, 2, \dots, l \end{aligned}$$

其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是 n 维欧氏空间 R^n 中的一个向量, $f(X)$, $g_i(X)$ 和 $h_i(X)$ 是定义在 R^n 上的

收稿日期: 2001-02-08; 修订日期: 2001-08-20

基金项目: 本文研究得到 973 项目(G20000779), 高等学校骨干教师资助计划, 中国博士后科学基金共同资助

作者简介: 阎广建(1972—), 男, 1999 年于中国科学院遥感应用研究所获博士学位, 目前在北京师范大学遥感与 GIS 研究中心担任科研和教学工作。主要从事定量遥感的理论建模与反演研究, 已发表论文 16 篇, 接收 5 篇。

实值函数。如果这些函数中至少有一个不是 X 的线性函数,又可称之为非线性规划问题。当 $m=l=0$ 时,称之为无约束最优化问题。

无约束最优化问题目前已有许多有效的算法,约束最优化方法大多是在其基础上发展起来的,大致可分为可行方向法,约束变尺度法和增广目标函数法等。前两种方法类似于无约束优化中的解析法,都要用到目标函数的导数,而增广目标函数法通过构造增广目标函数引入罚因子,把约束问题转化为一组无约束极小化问题来求解,要不要目标函数的导数可以根据实际采用的无约束优化方法而定,具有较大的灵活性。

遥感物理模型的复杂程度差异很大,当目标函数不是十分复杂且其导数可求时,可行方向法中的广义简约梯度法(GRG)和约束变尺度法是较好的选择,因为其收敛速度较快。但是对于植被遥感模型中最重要的辐射传输模型和几何光学模型而言,多数模型的目标函数较为复杂,增广目标函数法在具体应用中更为方便,是本文主要的研究对象。

增广目标函数法虽然用起来较为方便,但也有较为明显的缺点,主要表现在速度较慢和病态问题两个方面,下面进行简要的分析。

增广目标函数法的基本思想是把约束最优化问题分解为若干次的无约束最优化问题来求解,包括罚函数法和乘子法两类。罚函数法的思路是当迭代点超出可行域或靠近边界时,目标函数值突然增大,以示惩罚。从理论上讲,当罚因子 $\sigma \rightarrow +\infty$ (外罚法)或 $r \rightarrow 0$ (内罚法)时,总可以得到约束问题的最优解,但是此时相应的 Hessian 矩阵的条件数会随着 σ 的增大或 r 的减少而变大,并趋向于病态,使得罚因子的选择往往处于进退维谷的境地。针对这一问题,出现了乘子法。乘子法的基本思想是结合 Lagrange 函数与外罚函数构成增广 Lagrange 函数,在此基础上只需要找到一个适当的罚因子 σ ,即可得到局部最优解,从而可能消除罚函数法的病态问题。求解等式约束问题的乘子法最初是由 Powell 和 Hestenes 几乎同时各自独立地提出,简称为 PH 算法^[5]。Rockafellar 在 PH 算法的基础上将不等式约束转化为等式约束,提出了解一般约束问题的 PHR 算法,使得乘子法真正成为实用的被广泛采用的算法。然而正如本文下面的分析,在某些时候乘子法依然存在病态问题,而且相应速度也较慢,在定量遥感领域,有待进一步的改进。

3 罚矩阵和乘子法的推广形式及证明

尽管乘子法从理论上讲不要求罚因子趋于无穷大,但是实际应用中,大多数情况下都有若干约束条件,这些约束的量纲和数量级可能完全不同,甚至相差十分巨大。采用单一罚因子的 PH 或 PHR 算法对所有的约束采用一个总体的控制误差,于是当约束条件中一项或几项的绝对量值远远小于其他约束时,只能选择相对于另外一些约束来说非常小的控制误差。首先,这不利于运算速度的提高,另一方面,随着迭代次数的增加,罚因子 σ 可能会成倍增长,导致 Hessian 矩阵的条件数增大,造成在求解系列无约束问题时比较困难。比如有三项不可忽略的约束条件 $h_1(X)$ 、 $h_2(X)$ 和 $h_3(X)$,当它们都为有效约束时,存在关系:

$$h_1^2(X), h_2^2(X) \gg h_3^2(X),$$

当我们选取适当的罚因子 σ_1 时,反演到的 X 使得 $h_1(X)$ 和 $h_2(X)$ 成为无效约束,而 $h_3(X)$ 仍是有效约束,继续增加罚因子为 σ_2 ,可以使三项约束条件都满足,但此时一般会有:

$$\sigma_2 \gg \sigma_1$$

于是在无约束的优化过程中,一旦不满足 $h_1(X)$ 或 $h_2(X)$ 的约束条件,将产生很大的惩罚值,从这一点来讲,与罚函数法所遇到的问题是一样的。在我们以往的反演实践中,便发现了这种病态问题。

李小文等人指出,理想的罚点应该与参数取值的先验概率大致上成反比,即根据先验知识,其取值越不可能,罚点越重^[6]。从这一意义上讲,单一罚因子的乘子法不能给出理想的罚点。为此,本文从两个方面的考虑提出了罚矩阵的概念,并对乘子法进行了推广:

- (1) 减少优化过程的迭代次数;
- (2) 降低单一罚因子乘子法的病态特性。

由于不等式约束可以转化为等式约束进行优化^[5],本文以等式约束的优化问题进行阐述。

对于等式约束问题:

$$\begin{aligned} \min f(X), \quad X \in \mathbb{R}^n \quad (4) \\ \text{s.t.} \quad h_i(X) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned}$$

其中 $f_i(X)$ 和 $h_i(X)$ ($i=1, 2, \dots, l$) 为二阶连续可微函数,可行域:

$$D = \{X \in \mathbb{R}^n \mid h_i(X) = 0, i = 1, 2, \dots, l\}$$

将约束条件写成向量形式为:

$$H(X) = ((h_1(X), \dots, h_l(X))^T = (0, \dots, 0)^T = \mathbf{0}$$

设 $\Lambda \in R^l$ 为 Lagrange 乘子向量, 则(4)的 Lagrange 函数为:

$$L(X, \Lambda) = f(X) - \Lambda^T H(X) \quad (5)$$

定义罚矩阵 $\sum_{l \times l}, \sigma_{ij} \begin{cases} > 0 & (i=j) \\ = 0 & (i \neq j) \end{cases}$, 可见 \sum 为全部特征值大于 0 的对角阵。

利用罚矩阵 \sum 构造(5)的增广目标函数:

$$M(X, \Lambda, \Sigma) = L(X, \Lambda) + \frac{1}{2} H(X)^T \Sigma H(X) \quad (6)$$

于是便得到了与罚因子相类似的目标函数形式, 但是由于罚矩阵主对角线上的任两个元素可以不同, 相当于可以对不同的约束条件加上不同的权重, 从而是乘子法的一般形式。

从定性的角度来看, (6)的优点是明显的。首先在实际反演中可以对绝对量值较小的约束给予较大的初始惩罚值, 从而起到了加速迭代过程的作用。进一步, 在罚矩阵元素的选择上可以考虑参数取值的先验概率, 为理想罚点的构造提供了条件。最后, 由于给不同的约束条件赋予了不同的惩罚值, 可以使增广目标函数中的惩罚项不会因为一项或几项约束不能满足而反复迭代时出现代价函数陡然增大的情形, 也即克服了无约束优化过程中的病态问题。这可以从如下的例子里得到定性的解释。比如有两项约束条件 $h_1(X)$ 、 $h_2(X)$, 如果取罚因子都为 1, 当参数的取值由 X 变为 $X + \Delta X$ 时, 模型本身的变化为 100, $h_1(X)$ 为有效约束时惩罚值为 10^4 , $h_2(X)$ 为有效约束时惩罚值为 10^{-3} 。可见当罚因子为 1 时, 应该可以保证约束条件 $h_1(X)$ 发挥作用, 但 $h_2(X)$ 的约束效果根本无法体现。于是为了让 $h_2(X)$ 发挥作用, 我们加大罚因子为 10^7 , 此时一般可以保证所反演的 X 在 $h_1(X)$ 和 $h_2(X)$ 的约束范围之内。但是我们注意到在计算机的迭代搜索过程中, 一旦 $h_1(X)$ 变为有效约束, 所产生的惩罚值将达到 10^{11} , 这与外罚函数法所遇到的病态问题是一样的。而如果我们选择罚矩阵乘子法, 一开始就给定 $h_1(X)$ 对应的罚因子为 1, $h_2(X)$ 对应的罚因子为 10^7 , 这样即使 $h_1(X)$ 和 $h_2(X)$ 都为有效约束, 惩罚值也就是 10^4 的数量级, 避免了类似于外罚函数法的病态问题。同时, 不同罚因子的选择将加速迭代过程, 提高反演速度。

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

下面仿照罚因子乘子法的证明过程, 证明罚矩阵乘子法可以得到约束问题(4)的最优解, 能够用在

实际的优化问题中。

由于罚矩阵乘子法是一般罚因子乘子法的广义形式, 在简单的形式变化后, 我们可以得到罚矩阵乘子法的一阶必要条件和二阶充分条件, 请参阅文献[5]。为了叙述方便, 列出二阶充分条件如下:

定理 1(二阶充分条件)^[5]

在等式约束问题(4)中, 若:

(1) $f(X)$ 与 $h_i(X)$ ($1 \leq i \leq l$) 是二阶连续可微函数;

(2) 存在 $X^* \in R^n$ 与 $\Lambda^* \in R^l$ 使 Lagrange 函数的梯度为零, 即 $\Delta L(X^*, \Lambda^*) = \mathbf{0}$;

(3) 对于任意非零向量 $S \in R^n$ 且

$$S^T \Delta h_i(X^*) = 0, i = 1, \dots, l$$

均有 $S^T \Delta_X^2 L(X^*, \Lambda^*) S > 0$

则 X^* 是约束问题(4)的严格局部极小点。

对于罚矩阵, 本文定义如下概念:

设有罚矩阵:

$$\text{和 } \begin{cases} A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) & a_i > 0 (i=1, \dots, n) \\ B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n) & b_i > 0 (i=1, \dots, n) \end{cases}$$

在以下的叙述中, 我们称 $A \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} B$, 当且仅当

$$a_i \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} b_i (i=1, \dots, n)。$$

值得注意的是, 矩阵相等的概念有严格的数学基础, 而罚矩阵大小的概念仅为本文下面的论述服务。

下面仿照采用罚因子的乘子法的证明过程, 证明罚矩阵乘子法对于相应的引理和定理也成立。

引理 2

已知矩阵 $A_{n \times n}$ 和 $B_{n \times m}$, 则对满足 $B^T X = \mathbf{0}$ 的任意 $X \neq \mathbf{0}$, 都有 $X^T A X > 0$ 的充分必要条件是: 存在一个对角矩阵 $\sum_{m \times m}^*$, 使得当 $\sum > \sum^*$, $X \in R^n$, $X \neq \mathbf{0}$ 时,

$$X^T (A + B \sum B^T) X > 0 \quad (7)$$

证明:

充分性:

因 $B^T X = \mathbf{0}$, 故 $X^T B \sum B^T X = 0$, 由(7)有 $X^T A X > 0$ 。

必要性:

(1) 先证明存在一个对角矩阵 \sum^* , 对任意的

$X \in R^n, X \neq 0$ 有

$$X^T(A + B \sum^* B^T)X > 0 \tag{8}$$

利用反证法,假设(8)不成立,即对任意正整数组成的对角矩阵 $K_{m \times m}, \min(k_{ii}) = l (l=1, 2, \dots)$, 必存在向量 X_l 且 $X_l = 1$, 使得:

$$X_l^T(A + BK_l B^T)X_l \leq 0 \tag{9}$$

由于 $\{X_l\}$ 为有界序列, 必有收敛子列 $\{X_{l_j}\}$, 其极限为 $\bar{X}, \bar{X} = 1$. 对于 $\{X_{l_j}\}$, 由(9)有:

$$X_{l_j}^T(A + BK_j B^T)X_{l_j} \leq 0$$

上式两端对 l_j 取极限, 得:

$$\bar{X}^T A \bar{X} + \lim_{l_j \rightarrow \infty} (\bar{X}^T B K_j B^T \bar{X}) \leq 0$$

令 $B^T \bar{X} = Y, \bar{X}^T B = Y^T$, 上式变为:

$$\bar{X}^T A \bar{X} + \lim_{l_j \rightarrow \infty} Y^T K_j Y \leq 0 \tag{10}$$

因为 K_j 为正定对角阵, 所以若 $Y \neq 0$, 必有 $Y^T K_j Y > 0$, 且当 $l_j = \min(k_{ii}) \rightarrow +\infty$ 时,

$$Y^T K_j Y > l_j Y^T Y \rightarrow +\infty$$

又 $\bar{X} = 1, A$ 为关于 l_j 的常数矩阵, 这与(10)相矛盾, 于是必有 $Y = 0$, 即 $B^T \bar{X} = 0$. 则(10)变为:

$$\bar{X}^T A \bar{X} \leq 0, (\bar{X} \neq 0)$$

这又与引理中的条件 $\bar{X}^T A \bar{X} > 0$ 相矛盾, 故(8)成立.

(2) 由(1)的证明过程可知, 设 $\sum \geq \sum^*$, 对于任意的 $X \in R^n, X \neq 0$ 有:

$$X^T(A + B \sum B^T)X \geq X^T(A + B \sum^* B^T)X > 0$$

于是必要性得证.

定理 3

设在约束问题(4)中, $X^* \in R^n$ 和 $\Lambda^* \in R^l$ 满足定理 1 的二阶充分条件, 则存在一个对角矩阵 $\sum^* > 0$, 对所有 $\sum \geq \sum^*, X^*$ 是无约束问题(6)的严格局部极小点; 反之, 若 $H(X_0) = 0$ 且 X_0 对某个 Λ_0 是无约束问题(6)的局部极小点, 则 X_0 是约束问题(4)的局部极小点.

证:

由 $M(X, \Lambda, \Sigma)$ 的定义有:

$$\begin{aligned} \Delta_X M(X, \Lambda, \Sigma) &= \Delta_X L(X, \Lambda) \\ &\quad + H(X)^T \sum \Delta_X H(X) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\Delta_X^2 M(X, \Lambda, \Sigma) = \Delta_X^2 L(X, \Lambda)$$

$$\begin{aligned} &+ [\Delta_X H(X)]^T \sum \Delta_X H(X) \\ &+ H(X)^T \sum \Delta_X^2 H(X) \end{aligned}$$

因为 $H(X^*) = 0$, 则有:

$$\begin{aligned} \Delta_X^2 M(X^*, \Lambda^*, \Sigma) &= \Delta_X^2 L(X^*, \Lambda^*) \\ &\quad + [\Delta_X H(X^*)]^T \sum \Delta_X H(X^*) \end{aligned} \tag{12}$$

由二阶充分条件, 对于每个满足:

$$Z^T \Delta_X H(X^*) = 0$$

的非零向量 Z 有:

$$Z^T \Delta_X^2 L(X^*, \Lambda^*) Z > 0$$

令 $[\Delta_X H(X^*)]^T = B, \Delta_X^2 L(X^*, \Lambda^*) = A$, (12)可重写为:

$$\Delta_X^2 M(X^*, \Lambda^*, \Sigma) = A + B \sum B^T$$

由引理 2 可知, 存在 $\sum^* > 0$, 使得当 $\sum \geq \sum^*$, 且 $Z \neq 0$ 时有:

$$Z^T \Delta_X^2 M(X^*, \Lambda^*, \Sigma) Z > 0$$

又由(11)和 $H(X^*) = 0$ 可知:

$$\Delta_X M(X^*, \Lambda^*, \Sigma) = \Delta_X L(X^*, \Lambda^*) = 0$$

由定理 1 的二阶充分条件知 X^* 为 $M(X, \Lambda^*, \Sigma)$ 的严格局部极小点.

反之, 因 X_0 是 $M(X, \Lambda_0, \Sigma)$ 的局部极小点, 且 $H(X_0) = 0$, 则对任意与 X_0 充分靠近的可行解 \bar{X} 有:

$$M(X_0, \Lambda_0, \Sigma) \leq M(\bar{X}, \Lambda_0, \Sigma) \tag{13}$$

又 $H(X_0) = 0, H(\bar{X}) = 0$, 故:

$$M(X_0, \Lambda_0, \Sigma) = f(X_0)$$

$$M(\bar{X}, \Lambda_0, \Sigma) = f(\bar{X})$$

由(13)有:

$$f(X_0) \leq f(\bar{X})$$

即 X_0 为约束问题(4)的局部极小点.

定理 4

设 X_k 是(6)的最优解, 则 X_k 为(4)的最优解且 Λ_k 为相应的 Lagrange 乘子向量的充要条件是 $H(X_k) = 0$.

此定理的证明与采用罚因子乘子法的证明过程相同, 参见文献[5]第 169 页.

证明了以上引理和定理, 即从理论上保证了罚矩阵乘子法可以得到最优解, 能够用到实际的反演中. 仿照采用罚因子的 PH 算法, 本文给出如下等式约束问题的乘子法的推广形式:

1) 选定初始点 X_0 、初始乘子向量 Λ_1 、初始罚矩阵 \sum_1 及惩罚放大系数 c 、控制误差向量 $E (\epsilon_i > 0, i=1, \dots, l)$ 与常数 $\theta \in (0, 1)$, 令 $k=1$.

2) 以 X_{k-1} 为初始点求解无约束问题:

$$\min M(X, \Lambda_k, \Sigma_k) = f(X) - \Lambda_k^T H(X) + \frac{1}{2} H(X)^T \Sigma_k H(X)$$

得最优解 X_k 。

3) 当 $[h_i(X_k)]^2 < \epsilon_i (i=1, \dots, l)$ 时, 停止迭代, 给出最优解 X_k , 否则转 4)。

4) 当 $\left[\frac{h_i(X_k)}{h_i(X_{k-1})}\right]^2 \leq \theta (i=1, \dots, l)$ 时, 转 5), 否则令 $\sigma_{ii, k+1} = c\sigma_{ii, k} (i=1, \dots, l)$, 得到罚矩阵 Σ_{k+1} , 转 5)。

5) 令 $\Lambda_{k+1} = \Lambda_k - \sum_k H(X_k), k=k+1$, 转 2)。

对于不等式约束问题, 完全可以利用 Rochafellar 推广 PH 算法的思想, 将其转化为等式约束问题, 这里不再详述, 参见参考文献[5]。

4 算法评价

通过对大量模拟反演实验的统计分析, 本文对

表 2 参数预测值及物理边界

Table 2 Best guesses and physical ranges for the model parameters

参数	nR^2	b/R	h/b	$\Delta h/b$	G	C	Z
预测值	0.183	6.175	2.162	3.947	0.255	0.299	0.030
物理边界	0.0-0.8	1.0-16.0	1.0-10.0	0.1-7.0	0-1	0.0-0.5	0.0-0.255

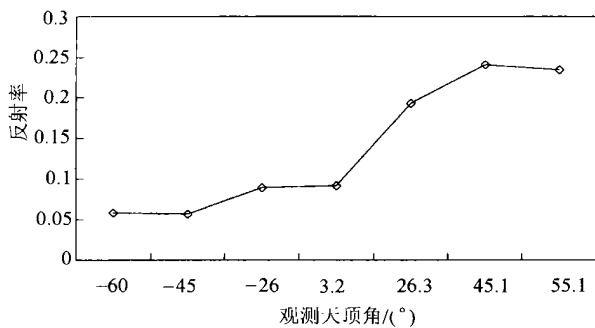


图 1 近似主平面内的模拟反射率值

Fig. 1 Simulated reflectance near principle plane

在模拟反射率值的基础上, 本次实验加入了标准偏差为 0-0.03 的高斯分布的随机噪声并反演, 重复此过程 100 次, 得到统计结果列于图 2。图中的横坐标 Δn 表示附加的随机噪声的标准偏差, 纵坐标为相应参数的均值或标准偏差。从图中可以看出, 罚矩阵乘法比罚因子乘子法的迭代次数减少

采用罚因子的乘子法与罚矩阵乘子法作了比较。所反演的模型是 Li-Strahler GOMS 模型^[7]。模拟实验中随意给定一组参数值作为真值(表 1), 观测及太阳入射角度选择了 BOREAS (Boreal Ecosystem-Atmosphere Study) SSA (Southern Study Area) OBS (Old Black Spruce) 试验点机载 ASAS (Advanced Solidstate Array Spectroradiometer) 三个方位的 21 个角度。接近主平面的模拟反射率如图 1 所示。反演中共用到了 15 个约束条件, 其中 14 个均是参数的物理边界, 另外一个出于阴影亮度值低于光照表面亮度的考虑。作为示例, 反演中给定 nR^2 和 b/R 的预测值有一定的偏差, 其余参数的预测值为其真值(表 2)。

表 1 模拟中采用的 GOMS 模型 7 个参数的真值

Table 1 Assumed values for 7 parameters of GOMS in simulation

nR^2	b/R	h/b	$\Delta h/b$	G	C	Z
0.383	4.175	2.162	3.947	0.255	0.299	0.030

了大约 30%(这里的迭代次数考虑的是迭代反演中调用前向模型的次数), 也就是说, 反演速度提高了大约 30%。另一方面, 虽然从统计的角度来看, 两种方法的反演结果相类似, 但是在实际的反演中, 我们发现尽管两种方法的超始条件都一样(相同的预测值, 相同的约束条件, 相同的控制误差, 相同的初始惩罚值和相同的惩罚放大系数), 罚矩阵乘法在 100 次的反演中, 总有几次的反演结果与罚因子乘子法的结果差别较大, 而此时后者的结果明显远离真实值, 前者却依然较为接近, 这从一个侧面说明了罚矩阵乘法能够克服病态问题。

5 结论

遥感物理模型反演算法问题的实质是约束最优化问题, 本文探讨了现有约束最优化方法在遥感反演算法中的适用性, 提出了罚矩阵的概念, 并给出了乘子法的推广形式及相关引理和定理的证明。经过

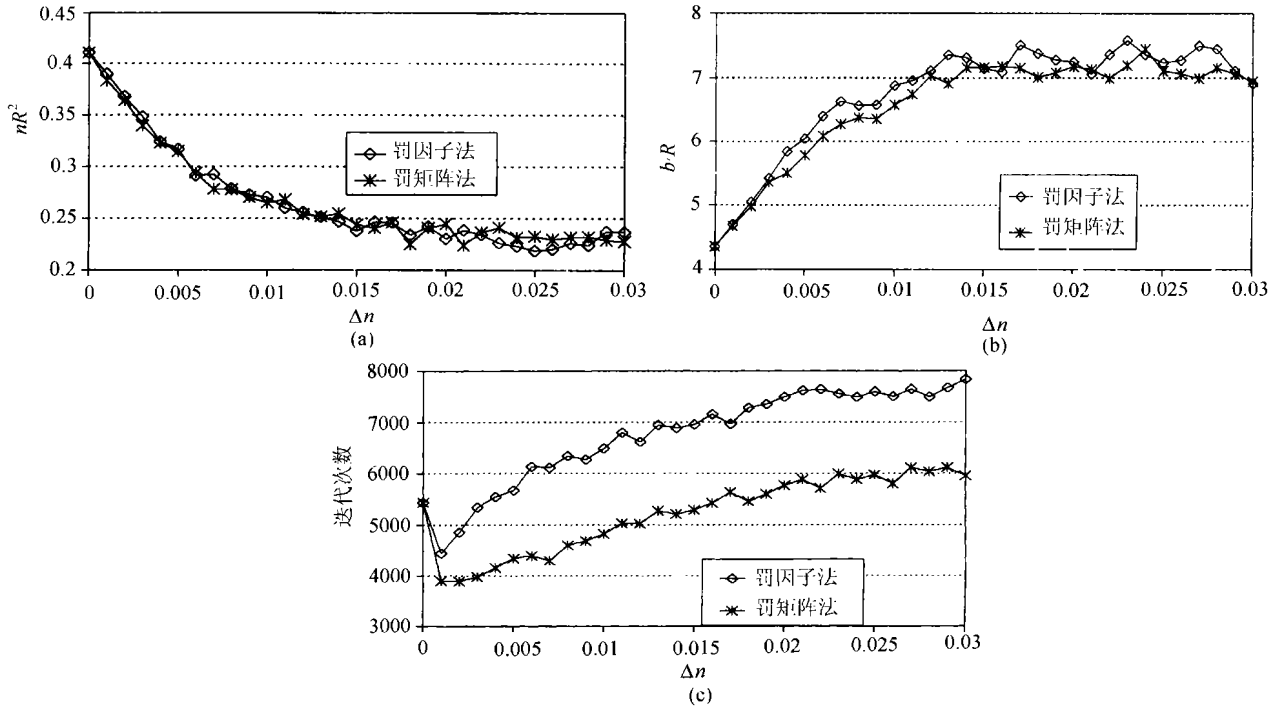


图 2 结构参数 nR^2 和 b/R 的反演结果。(a), (b) 均值; (c) 迭代次数。

Fig. 2 Inversion results of structural parameters nR^2 and b/R

(a), (b) Mean; (c) Iterative numbers

模拟的反演实验表明, 在所有的初始条件相同的情况下, 本文提出的罚矩阵乘法比原始的罚因子乘子法的运算速度提高了大约 30%, 而且克服了一定的病态效应。另外, 罚矩阵乘法具有很大的灵活性, 可以在如下几个方面进一步利用先验知识来构造理想的罚点:

- (1) 罚矩阵中的元素选择不同的初始值, 减少反演中的迭代次数;
- (2) 通过给定不同的误差向量元素值来区分约束条件的重要性;
- (3) 引入放大系数矩阵来代替单一的放大系数, 控制不同约束条件的收敛速度。

参考文献 (References)

- [1] Goel N S. Models of vegetation canopy reflectance and their use in estimation of biophysical parameters from reflectance data [J]. *Remote Sens. Rev.*, 1988, 4: 1-212.
- [2] Goel N S, D E Strebel, R L Thompson. Inversion of vegetation

- canopy reflectance models for estimating agronomic variables II; Use of angle transforms and error analysis as illustrated by Suits' model [J]. *Remote Sens. Environ.*, 1984, 14: 77-111.
- [3] Goel N S, R L Thompson. Inversion of vegetation canopy reflectance models for estimating agronomic variables III; Estimation using only canopy reflectance data as illustrated by the Suits model [J]. *Remote Sens. Environ.*, 1984, 15: 223-236.
- [4] Li X, A H Strahler. A knowledge-based inversion of physical BRDF model and three examples [C]. *Proc. Int. Geosci. Remote Sens. Symp.* 96, 1996, 2173-2176.
- [5] Xie K, L Han, Y Lin. Optimization method [M]. Tianjin Univ. Press, Tianjin, 1998. [解可新, 韩立兴, 林友联, 最优化方法, 天津大学出版社, 1998.]
- [6] Li X, J Wang. Optical Remote Sensing Models and Structure Parameterization for Vegetation [M]. Beijing: Science Press, 1995. [李小文, 王锦地, 植被光学遥感模型与植被结构参数化, 北京: 科学出版社, 1995.]
- [7] Li X, A H Strahler. Geometric-optical bidirectional reflectance modeling of the discrete crown vegetation canopy: effect of crown shape and mutual shadowing [J]. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 1992, 30(2): 276-292.

An Extension of Augmented Lagrange Multiplier Method for Remote Sensing Inversion

YAN Guang-jian¹, ZHU Chong-guang², WANG Jin-di¹, LI Xiao-wen^{1, 3}

(1. *Research Center for Remote Sensing and GIS, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;*

2. *Institute of Remote Sensing Applications, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101, China;*

3. *Center for Remote Sensing, Boston University, 675 Commonwealth Avenue, Boston, MA 02215, USA*)

Abstract: Inversion algorithms are very important in quantitative remote sensing. Currently, the classic least square method is still used widely. We suggest that remote sensing inversions are often typical constrained optimization problems. Many good constrained optimization methods may be used in remote sensing.

After a brief review of the constrained optimization methods, we discuss the widely used augmented Lagrange multiplier method in detail. Only one penalty factor is used in this method, even if this factor is not required to be infinitive in theory, it may still increase larger and larger to meet several constraints with very different magnitudes. As a result, similar to the penalty function method, the ill-posed problem and low efficiency still bother the augmented Lagrange multiplier method. As a solution, we extend the penalty factor to be a diagonal penalty matrix, and present an extended augmented Lagrange multiplier method. Because different constraints are given different penalty factors in this new method, a priori knowledge can be used to help decrease the ill-posed problem and increase the iteration speed. After proving this new method in theory, we do detailed simulation and inversion as further validation. It is clear from the statistical analysis that the rate-of-convergence of our method has been improved of about 30 percent compared with the original penalty factor based method but with similar accuracies. Furthermore, it is also found that our extended method is resistant to ill-posed problems.

Key words: augmented Lagrange multiplier method; inversion; constrained optimization; rate-of-convergence; ill-posed problems; penalty matrix